Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Студенческая олимпиада по математике
21 апреля 2012 года

1 курс

1. Последовательность $\{a_n\}$ определяется соотношениями
$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \geq 1.$$
Доказать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n a_n$, и найти его.

2. Пусть $x_1 \neq \pi k$, $x_{n+1} = \sin x_n$. Доказать, что при некотором $\alpha > 0$ существует ненулевой предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n n^\alpha$, и найти этот предел.

3. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на вещественной прямой и для любого вещественного x верно равенство
$$\lim_{h\to\infty} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = 0,$$
то $f(x)$ — линейная функция.

4. Пусть G — открытое, не ограниченное сверху множество вещественных чисел. Существует ли такое $\alpha > 0$, что множество G содержит бесконечно много точек вида na, где $n \in \mathbb{N}$?

5. Доказать равенство $\sum\limits_{i_1=1}^{m} \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} i_k = C_{m+k}^{k+1}$.

6. В квадратной матрице чётного порядка на главной диагонали стоят нули, а остальные элементы равны 1 или -1. Доказать, что эта матрица обратима.

7. Булева функция f называется универсальной, если любую линейную функцию (т.е. функцию вида $\alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n x_n$) можно однозначно задать на некотором подмножестве наборов функции f. Доказать, что универсальных функций трёх переменных не существует.

8. Обозначим через B_2 базис всех функций двух переменных. Доказать, что любая функция трёх переменных реализуется в базисе B_2 схемой, состоящей не более чем из четырёх элементов.